Гимназија „Свети Сава“ Пожега

Матурски рад из математике

Гранична вредност функције

Ментор:

Небојша Варница

Ученик:

Немања Ршумовић

Пожега, јун, 2020.год

С А Д Р Ж А Ј

Страна

1. УВОД

Мерењем објеката ограничених кривим линијама и њиховим површинама бавили су се још старогрчки математичари.

Око V века п.н.е. грчки филозоф Зенон је формулисао своје чувене парадоксе који су укључивали процесе са граничним вредностима (лимесима). Други грчки филозофи, као што су Леукип, Демокрит, Антифонт, Еудокс су развили метод за израчунавање површине фигуре убацивањем низа полигона чије површине теже ка површини читаве фигуре. Међу њима био је и Архимед из Сиракузе који је у III веку п.н.е. разрадио идеју коју данас сматрамо граничном вредношћу како би израчунао запремину лопте – поделио је лопту на мање делове, а онда је и повећавао њихов број. Архимедово дело „Метода“, било је изгубљено до 1906. године када су математичари открили да је Архимед био близу открића инфинитезималног рачуна, гране математике која се бави функцијама, изводима, интегралима, лимесима и бесконачним низовима, и то пре више од 2000 година!

Пошто је Архимедово дело било изгубљено, људи су морали поново да развију ту идеју. Озбиљније разумевање граничне вредности почело је у XVII веку, у радовима Исака Њутна и Годфрида Вилхелма Лајбница који су поново развили принципе овог дела математике. У XVIII веку Ојлер је парадоксално сумирао неке дивергентне редове, да би Гаус 1813. године строгим дефиницијама по први пут у историји математике одредио услове конвергенције низова у граничним условима. Савремену дефиницију лимеса дао је чешки математичар Бернард Болцано 1816. године коју је 1870. прихватио Карл Вајерштрас уводивши ознаку

$$\lim_{B \to C} A$$

У математици, гранична вредност је битна за математичку анализу уопште и користи се за дефинисање непрекидности, извода и интеграла. Постоји много разлога за коришћење граничне вредности и у физици. Пример за то јесте тренутна брзина. Уколико се зна положај објекта у две тачке у времену, може се израчунати његова просечна брзина. Но када се узима све мањи и мањи временски интервал, просечна брзина се приближава одређеној вредност, а то се управо објашњава помоћу граничне вредности.

Научна метода је моћан алат, али има своја ограничења. Она се заснивају на чињеници да нека хипотеза мора бити тестирана, подвргнута провери и да експеримент, као и запажања морају бити поновљиви. На пример, наука не може доказати или оспорити тезу о постојању Бога или било ког другог натприродног ентитета. У физичким наукама је већ одавно јасно да савршена мерења нису могућа, стога јављају се случајеви у којима се нешто мери до одређене тачности, приликом чега се оставља могућност за постојањем извесне грешке која је минимална.

У овом раду показаћемо основне појмове, правила и примене граничне вредности функције, као основног појма математичке анализе.

2. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ

2.1. Појам функције

Функција је један од основних појмова математике. Дефиниција функције као промењљиве величине је непрецизна, јер се при томе користи непрецизан појам промењљиве величине и зато се обично користи савременији приступ овом проблему преко теорије скупова.

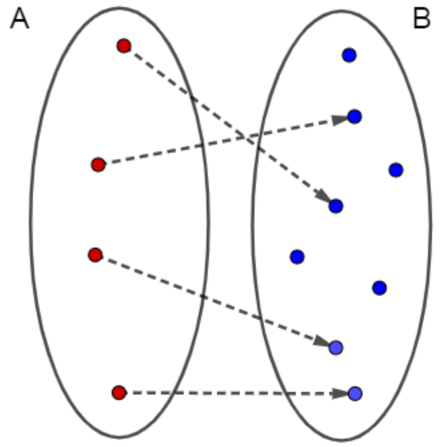
У математици, скуп се узима као основни појам. Декартов производ скупова представља скуп уређених парова. Уређени пар елемената чине било која два елемента код којих се зна који од њих је први, а који други. Потом, релација је непразан подскуп Декартовог производа скупова, док је функција једна врста релације код које сваком елементу одговара само један елемент.

Ако су A и B два непразна скупа, функција или пресликавање скупа A у скуп B је сваки подскуп f скупа A×B, такав да за свако $x \in$ A постоји тачно један $f(x) \in$ B који му је додељен. Ако (x,y) припада релацији f, онда се x, прва компонента, назива оригинал, док се y, друга компонента, назива слика. Ово записујемо као: f: A $\rightarrow$ B

Пример 1.

A={1,2,3,4}
ρ_1={(1,2),(2,1),(2,3),(3,4),(4,1),(4,3)} – није функција
ρ_2={(1,3),(2,4),(3,3),(4,2)} – јесте функција
↳ (1,3) пишемо као $1\rho_2 3$ или 1 $\rightarrow$ 3, и чита се „1 се пресликава у 3“.

Скуп A је домен функције $x \in$ A и означава се са D(f). То је скуп на коме је функција дефинисана с лева на десно дуж x осе. Док је скуп B кодомен функције $y \in$ B и означава се са $C_D(f)$. То је скуп вредности функције од доле на горе дуж y осе. Стога, скуп A је домен (скуп оригинала), а скуп B је кодомен (скуп слика).



Слика 1. Функција f: A $\rightarrow$ B

2.2. Појам низа

Да бисмо лакше дефинисали граничну вредност функције дотаћи ћемо се појма низа и његове граничне вредности.

Дефиниција 1. Низови су функције које пресликавају скуп природних бројева у скуп реалних бројева.

На тај начин су низови функције $f, g, t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, дефинисане за сваки природни број n

$$f(n) = \frac{1}{n}, \quad g(n) = n!, \quad t(n) = 2^n.$$

Пример 2.

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{9}, \dots$$

Наведени низ бројева означићемо са a. Сама уређеност и пребројивост скупа природних бројева нам омогућава да редом слике низа a поређамо у низ:

$$a(1), \quad a(2), \quad a(3), \quad a(4), \quad a(5), \quad a(6), \quad a(7), \quad a(8), \quad a(9), \dots$$

или:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad a_5, \quad a_6, \quad a_7, \quad a_8, \quad a_9, \dots$$

Стога, овај низ има општи члан a_n облика $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, док су његови чланом редом $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ...

Низ може да буде аритметички, у коме је разлика сваког члана и његовог претходника сталан број, или пак геометријски, код кога је количник сваког члана и његовог претходника сталан број. Неки низови су такви да им је сваки следећи члан већи од претходног, и њих називамо растући, док су опадајући низови они код којих је сваки члан мањи од претходног.

Низ је конвергентан уколико се чланови низа приближавају ка неком сталном, фиксном реалном броју, када n (индекс низа) неограничено расте, односно тежи бесконачности (овај појам нећу прецизније објашњавати). Тај број се назива граница или лимес низа. У примеру 2. сви чланови низа су позитивни и мањи од првог члана $(a_1 = 1)$, њихова вредност опада са порастом индекса приближавајући се 0. Из тога се закључује да када индекс тежи бесконачности општи члан овог низа тежи 0.

Низ a конвергира ка некој граници b, што приказујемо као:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \text{ или } a_n \to b \text{ када } n \to \infty$$

Пример 3.

$$a(n) = (-1)^n$$

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = 1, \quad a_5 = -1, \quad a_6 = 1 \dots$$

У овом случају чланови низа се понашају исто, без обзира на вредност индекса n и не теже једном фиксном реалном броју.

Уколико је растући низ ограничен одозго, па су сви његови чланови мањи од неког броја, он је и конвергентан.

Пример 4. Растући, ограничен одозго, конвергентан низ са општим чланом

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Чланови овог низа су следећи реални бројеви:

$e_1 = 2,\quad e_2 = 2{,}25,\quad e_3 = 2,(370),\quad e_4 = 2{,}44141,\quad e_5 = 2{,}48832,\quad \dots\quad e_{10} = 2{,}59374,\quad \dots$

$e_{50} = 2{,}69159,\quad \dots\quad e_{100} = 2{,}70481,\quad \dots\quad e_{1000} = 2{,}7169,\quad \dots\quad e_{10000} = 2{,}71815\quad \dots$

Из овога видимо да што је већи индекс низа e то је одговарајући члан ближи ирационалном броју $e \approx\ 2{,}71828182$ ... који представља границу низа, па важи

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Потреба за израчунавањем овог низа проистекла је из банкарства, а проблем одређивања границе овог низа успоставио је швајцарски математичар Јаков Бернули на основу претпоставке:

Ако кредитор да одређену суму новца на зајам са каматом, али под условом да се у сваком појединим тренутку пропорционални део годишње камате додаје капиталу, колико ће му се дуговати на крају године.

2.3. Појам граничне вредности функције

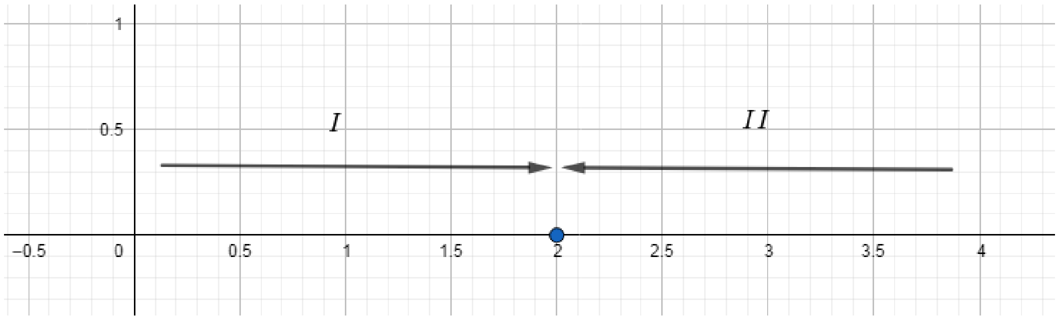
Појам граничне вредности функције представља један од основних појмова математичке анализе на коме бивају засновани појмови попут непрекидности, диференцијабилности саме функције, математички изводи и интеграли. Овим појмом описујемо ситуацију у којој се вредност неке функције $y = f(x)$ групишу око тачке $b \in \mathbb{R}$ када се вредности за аргумент групишу око неке тачке a која је тачка нагомилавања домена функције, односно када описујемо ситуацију у којој су вредности функције произвољно близу тачке b када су вредности за аргумент довољно близу тачке a.

Функције које имају граничну вредност у некој тачки називају се конвергентне функције, док оне које немају називају се дивергентне, баш као и низови.

Пример 5.

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ $(x \neq 2)$

$x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$



Слика 2. Приближавање тачки 2

Погледаћемо како се дата функција понаша када се приближава тачки у којој није дефинисана, и то са леве стране (I) и десне (II):

I

$$f(1{,}9) = \frac{1{,}9^2 - 4}{1{,}9 - 2} = 3{,}9$$
$$f(1{,}99) = \frac{1{,}99^2 - 4}{1{,}99 - 2} = 3{,}99$$
$$f(1{,}999) = \frac{1{,}999^2 - 4}{1{,}999 - 2} = 3{,}999$$

...

II

$$f(2{,}1) = \frac{2{,}1^2 - 4}{2{,}1 - 2} = 4{,}1$$
$$f(2{,}01) = \frac{2{,}01^2 - 4}{2{,}01 - 2} = 4{,}01$$
$$f(2{,}001) = \frac{2{,}001^2 - 4}{2{,}001 - 2} = 4{,}001$$

...

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	3,9	3,99	3,999	3,9999	Није дефинисана	4,0001	4,001	4,01	4,1

Табела 1. Понашање функције у околини тачке 2

Из претходног видимо да функција $f(x)$ није дефинисана у тачки 2, али да је њена вредност у околини те тачке веома близу броју 4. Како се приближавамо тачки 2, то је и вредност саме функције ближа броју 4, стога, можемо закључити да она истом и тежи. То се назива **гранична вредност функције** или **лимес**. Записује се као

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4,$$

и чита се: „гранична вредност (или лимес) функције $\frac{x^2-4}{x-2}$ када x тежи 2 је 4“.

Дефиниција 2. Тачка b је гранична вредност или граница функције $y=f(x)$ у тачки $x=a$ (или када x тежи a) ако за сваки позитиван број ε постоји позитиван број δ, који зависи од ε, тако да је за све вредности аргумента x које задовољавају неједнакост $0<|\,x-a|<\ \delta$, задовољена неједнакост $|f(x)-b|<\ \varepsilon$.

Пише се

$$\lim_{x\to a}f(x)=b,$$

или

$$f(x)\to b \text{ кад } x\to a.$$

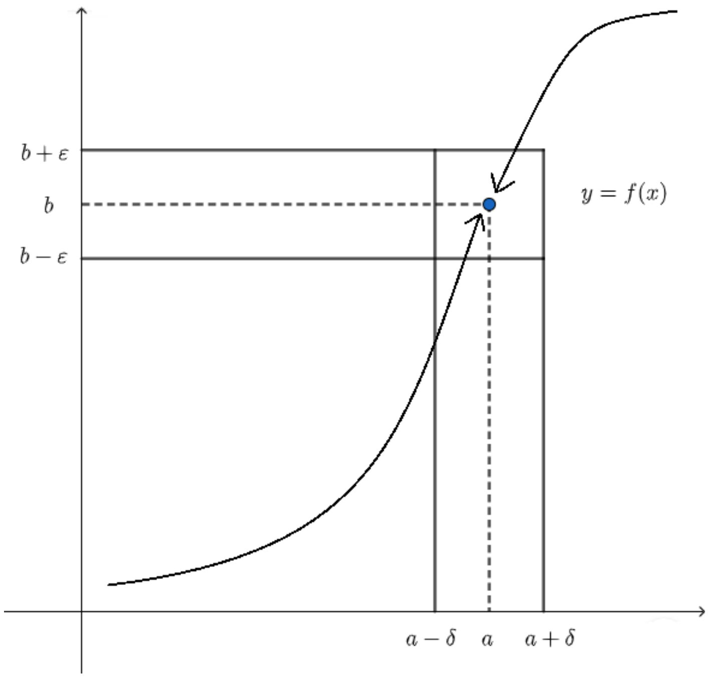
Тачка a се назива гранична тачка.

Ова дефиниција се може записати на следећи начин:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x)(0<|x-a|<\delta \implies |f(x)-b|<\ \varepsilon).$$

Уместо $0<|\,x-a|<\delta$, можемо писати и $x\in(a-\delta,a)\cup(\,a,a+\delta)$, а уместо $|f(x)-b|<\varepsilon$, $f(x)\in(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$.

(Видети слику 3.)



Слика 3. Граница функције $y=f(x)$

Дефиниција 3. Посматрајући скуп $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$, тачка a је тачка нагомилавања скупа A ако у свакој њеној околини постоји бар једна тачка скупа A различита од a.

Нека $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$ и $a \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ($\overline{\mathbb{R}}$ је проширени скуп реалних бројева, проширен са $\pm\infty$) тачка нагомилавања скупа A. Кажемо да функција $f\colon \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ има граничну вредност $b \in \overline{\mathbb{R}}$ у тачки a ако сваки низ $\{x_n\}_{n\in N}$ за који је $x_n \in \mathrm{A} \setminus \{a\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ важи да је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = f(x_n) = b.$ Тада записујемо

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Дефиниција 4. Нека $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$ и $a \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа A, кажемо да је $b \in \overline{\mathbb{R}}$ гранична вредност функције $f\colon \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ у тачки, и пишемо

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

ако за сваку околину $\mathrm{U}(b)$ тачке b постоји околина $\mathrm{U}(a)$ тачке a тако да важи импликација:

$$(\forall x \in \mathrm{A} \setminus \{a\})\big(x \in \mathrm{U}(a) \Longrightarrow f(x) \in \mathrm{U}(b)\big).$$

Наведене дефиниције су међусобно еквивалентне. Дефиниција 2 позната је и као Хајнеова, а дефиниција 3 као Кошијева.

Кажемо да функција f има бесконачну граничну вредност $+\infty(-\infty)$ у тачки $a \in \mathbb{R}$ ако за произвољно велики број $\mathrm{M} > 0$ (или произвољно мали број $\mathrm{M} < 0$) постоји $\delta > 0$ тако да важи

$$(\forall x \in \mathrm{A} \setminus \{a\})(\,|x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) > \mathrm{M})$$
$$\text{и } \lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

односно

$$(\forall x \in \mathrm{A} \setminus \{a\})(\,|x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) < \mathrm{M})$$
$$\text{и } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Ако функција f има граничну вредност у тачки a, онда је та гранична вредност једнозначно одређена. Нека је

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ и } \lim_{x\to a} g(x) = c,$$

где $a \in \mathbb{R}$ и $b, c \in \mathbb{R}$, тада је:

1) $\lim\limits_{x\to a} Kf(x) = K \lim\limits_{x\to a} f(x) = Kb$

2) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \pm c$

3) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \cdot c$

4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{b}{c} \quad c \neq 0$

5) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^k = b^k \quad k \in \mathbb{Q}$

6) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$

2.4. Лева и десна гранична вредност функције

Дефиниција 5. Број b_l представља леву граничну вредност функције $y = f(x)$ у тачки $x = a$ ако за сваки позитиван број ε постоји позитиван број δ, тако да је за све вредности x из интервала $(a - \delta, a)$ задовољена неједнакост $|f(x) - b_l| < \varepsilon$.

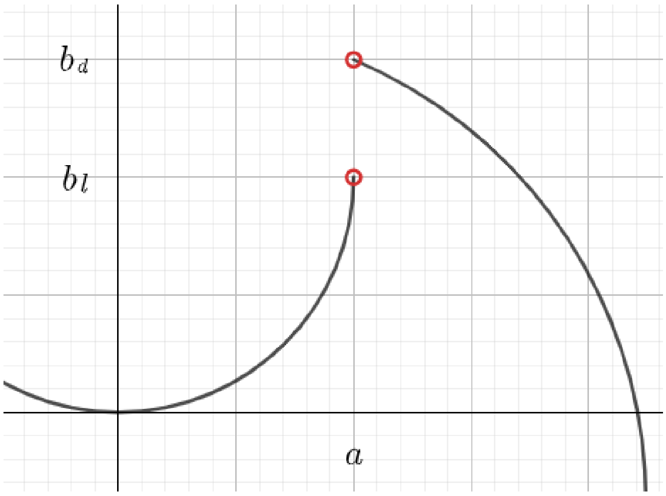
Пише се

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = b_l \text{ или } \lim_{x \to a-0} f(x) = b_l \text{ или } f(a-0) = b_l.$$

Број b_d представља десну граничну вредност функције $y = f(x)$ у тачки $x = a$ ако за сваки позитиван број ε постоји позитиван број δ, тако да је за све вредности x из интервала $(a, a + \delta)$ задовољена неједнакост $|f(x) - b_d| < \varepsilon$.

Пише се

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = b_d \text{ или } \lim_{x \to a+0} f(x) = b_d \text{ или } f(a+0) = b_d.$$



Слика 4. Лева и десна гранична вредност

Лева и десна гранична вредност функције може се дефинисати и помоћу низова.

Дефиниција 6. Број b_l је лева гранична вредност функције $y = f(x)$ у тачки $x = a$ за сваки низ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, такав да:

- $x_n \to a \quad (n \to +\infty)$
- $x_n < a \quad (n \in \mathbb{N})$
- $f(x_n) \to b_l \quad (n \to +\infty)$

Број b_d је десна гранична вредност функције $y = f(x)$ у тачки $x = a$ за сваки низ $\{x_n\}_{n \in N}$, такав да:

- $x_n \to a \quad (n \to +\infty)$
- $x_n > a \quad (n \in \mathbb{N})$
- $f(x_n) \to b_d \quad (n \to +\infty)$

Ако функција у тачки има граничну вредност, онда има и леву и десну граничну вредност, и оне су међусобно једнаке. И обрнуто, ако функција у тачки има леву и десну граничну вредност и оне су једнаке, онда има и граничну вредност у тој тачки. Дакле, из егзистенције

$$\lim_{x\to a} f(x),$$

следи егзистенција

$$f(a-0) \text{ и } f(a+0),$$

као и

$$f(a-0) = f(a+0).$$

Функције које немају граничну вредност $b \in \mathbb{R}$ у тачки a, слично као и низови који нису конвергентни, могу у тој тачки одређено да дивергирају, односно теже бесконачности. Уколико је функција $f(x)$ дефинисана у области $0 < |x-a| < \delta$, ако је у некој околини тачке a, осим можда у a, позитивна, дакле $f(x) > 0$, и ако је при томе гранична вредност

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

кажемо да у тачки a функција $f(x)$ одређено дивергира ка $+\infty$ и пишемо

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Слично томе, ако је функција $f(x)$ дефинисана у области $0 < |x-a| < \delta$, ако је у некој околини тачке a, осим можда у a, негативна, дакле $f(x) < 0$, и ако је при томе гранична вредност

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

кажемо да у тачки a функција $f(x)$ одређено дивергира ка $-\infty$ и пишемо

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

На овај начин лева, као и десна гранична вредност функције могу одређено да дивергирају ка $+\infty$, односно ка $-\infty$. Стога постоје:

- $\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to a+0} f(x) = -\infty$

2.5. Гранична вредност функције када $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$

Гранична вредност функције може се дефинисати и када $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ уколико је функција дефинисана на $[\delta, +\infty)(\delta \in \mathbb{R})$ тада је:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b,$$

ако и само ако је (увођењем смене $x = \frac{1}{t}$, када $x \to +\infty$, тада $t \to +0$):

$$\lim_{t \to +0} f\left(\frac{1}{t}\right) = b.$$

Слично томе:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b,$$

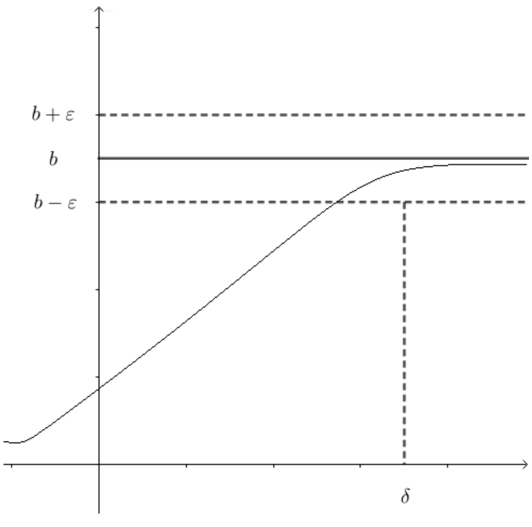
ако и само ако је (увођењем смене $x = \frac{1}{t}$, када $x \to -\infty$, тада $t \to -0$):

$$\lim_{t \to -0} f\left(\frac{1}{t}\right) = b.$$

Дефиниција 7. Кажемо да функција $f(x)$ има **граничну вредност** $b < \infty$ кад x неограничено расте, односно

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b,$$

ако за свако произвољно мало $\varepsilon > 0$, постоји такав број $\delta > 0$ да је за све вредности x, $|x| > \delta$, $|f(x) - b| < \varepsilon$.



Слика 5. Гранична вредност функције када $x \to +\infty$

Ако се зада произвољно мали реални број $\varepsilon > 0$, тада се може наћи такав број δ да се за све вредности аргумента x које су по апсолутној вредности веће од δ одговарајуће вредности $f(x)$ налазе унутар појаса $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, јер:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon.$$

Напомена:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x > \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x < -\delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

2.6. Израчунавање граничне вредности функције-примери

I облик $\boldsymbol{\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}}$ $P(x), Q(x) -$ полиноми

Задаци овог облика се решавају тако што се непознате x замене у изразу са познатом вредношћу a, и уколико се не добије неодређени израз облика „$\frac{0}{0}$“ и „$\frac{\infty}{\infty}$“ задатак је завршен. У супротном, полиноме растављамо на чиниоце и сређујемо израз док не дођемо у могућност да непознату x заменимо са познатом вредношћу a, а да се не добије неодређени израз.

1) $\boldsymbol{\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}}$

- $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{4 - 4}{0} = \frac{0}{0}$ $-$ израз је неодређен
- $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x + 2) = 2 + 2 = 4$

  ↳ Може да се крати са $(x - 2)$, јер x тежи, али није једнако 2

2) $\boldsymbol{\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 - 5x + 4}}$

- $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 - 5x + 4} = \frac{1^2 + 6 * 1 - 7}{1^2 - 5 * 1 + 4} = \frac{0}{0}$ $-$ израз је неодређен
- $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 7)}{(x - 4)(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x + 7)}{(x - 4)} = \frac{1 + 7}{1 - 4} = -\frac{8}{3}$

3) $\boldsymbol{\lim_{x \to -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3}}$

- $\lim_{x \to -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3} = \frac{(-3)^4 - 6(-3)^2 - 27}{(-3)^3 + 3(-3)^2 + (-3) + 3} = \frac{81 - 54 - 27}{-27 + 27 - 3 + 3}$

  $= \frac{0}{0}$ $-$ израз је неодређен

- $\lim_{x \to -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x - 3)(x + 3)(x^2 + 3)}{(x + 3)(x^2 + 1)} = \lim_{x \to -3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)}$

  $= \frac{(-3 - 3)((-3)^2 + 3)}{((-3)^2 + 1)} = \frac{(-6) * 12}{10} = -\frac{36}{5}$

II облик $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}}$ $\qquad P(x), Q(x)$ − полиноми

Задаци овог облика се решавају тако што и бројилац и именилац делимо највећим степеном из израза и користимо теорему:

$$\lim_{x\to a}\frac{const}{f(x)}=0 \text{ ако је } \lim_{x\to a}f(x)=\infty,$$

из које следи:

$$\frac{const}{\infty}\to 0 \quad \text{и} \quad \frac{const\neq 0}{0}\to\infty$$

1) $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{2x+1}}$

- $$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{2x+1}:\frac{x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1+\frac{2}{\infty}}{2+\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

2) $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^3+2x^2}}$

- $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^3+2x^2}:\frac{x^3}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=\frac{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}{1+\frac{2}{\infty}}=\frac{0+0}{1+0}=\frac{0}{1}=0$$

3) $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+1}{x^2+1}}$

- $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+1}{x^2+1}:\frac{x^3}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=\frac{3+\frac{2}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^3}}{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^3}}=\frac{3+0+0}{0+0}=\frac{3}{0}=\infty$$

4) $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-10x})}$ −да бисмо добили облик $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}}$ извршићемо рационализацију

- $$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-10x}):\frac{x+\sqrt{x^2-10x}}{x+\sqrt{x^2-10x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2-10x)}{x+\sqrt{x^2-10x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x}{x+\sqrt{x^2-10x}}:\frac{x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10}{1+\frac{\sqrt{x^2-10x}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10}{1+\sqrt{1-\frac{10}{x}}}$$

$$=\frac{10}{1+\sqrt{1-\frac{10}{\infty}}}=\frac{10}{1+\sqrt{1-0}}=\frac{10}{1+\sqrt{1}}=\frac{10}{1+1}=\frac{10}{2}=5$$

3. ТАБЛИЦА ОСНОВНИХ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ

3.1. Таблица са доказима

Таблица основних граничних вредности:	Услови
• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	
• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^x-1}{x}=\ln\alpha$ специјално: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\ln e=1$	$\alpha>0$
• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$	
• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$	$\alpha\in\mathbb{R}$
• $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ или $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$	

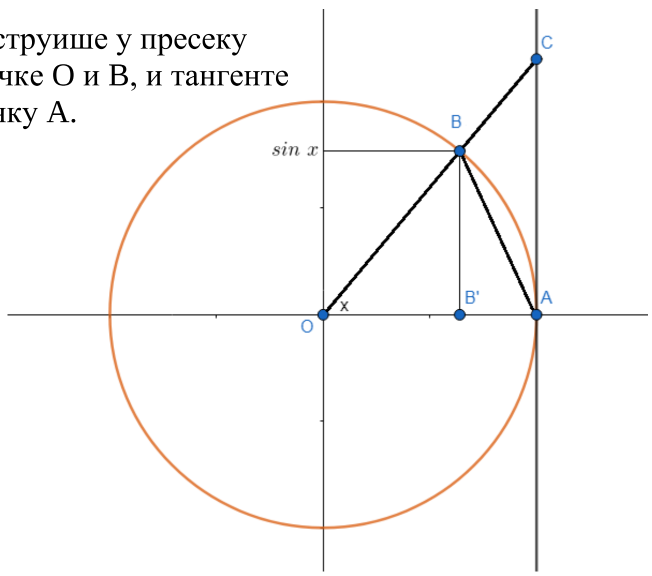
Табела 2. Таблица основних граничних вредности

Докази:

1) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$

Посматрамо тригонометријски круг и неки угао x, тако да теме угла бива смештено у центру круга, један крак лежи на x-оси и угао се мери у супротном смеру од кретања казаљке на часовнику. Пошто се говори о тригонометријском кругу, то значи да има јединични полупречник.

Тачка C се конструише у пресеку праве која садржи тачке O и B, и тангенте која пролази кроз тачку A.



Слика 6. Тригонометријски круг

Са слике се уочава да је површина кружног исечка AOB, односно површина исечка ограниченог полупречницима OA и OB, једнака збиру површине троугла ΔOAB и површине кружног одсечка над тетивом AB. Стога, површина кружног исечка AOB је већа од површине троугла ΔOAB. Такође, уочава се да ΔOAC садржи кружни исечак AOB. Према томе, површина кружног исечка AOB је мања од троугла ΔOAC.

Сада изражавамо ове три површине у функцији угла x. Прво посматрамо троугао ΔOAB чија је површина једнака

$$P_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA * BB'.$$

OA је основица овог троугла, а уједно и полупречник тригонометријског круга, па је OA$=1$. Висина овог троугла BB', на основу особина тригонометријског круга, једнака је $|\sin x|$ (апсолутну вредност узимамо због случаја када угао x има негативне вредности, док висина троугла и даље мора бити позитивна, али би се тада теме B налазило „испод“ основице OA). Тако да површину можемо записати као

$$P_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} * 1 * |sin\, x|$$

$$P_{\Delta OAB} = \frac{|sin\, x|}{2}.$$

Након тога, посматрамо кружни исечак AOB чији централни угао је угао x. Површину кружних исечака израчунавамо по формули

$$P_{is} = \frac{r^2 \pi \alpha}{360°}.$$

Са формуле у којој се угао мери у степенима прелазимо на формулу у којој се угао мери у радијанима

$$P_{is} = \frac{r^2 \alpha'}{2}$$

(α означава угао у степенима, α' означава угао у радијанима, док је $360° = 2\pi rad$).

Са r се означава полупречник круга, па је $r=$OA, док је централни угао исечка означен са α', дакле $\alpha' = x$. Стога, површина исечка са слике је

$$P_{is\ AOB} = \frac{OA^2}{2} * |x|.$$

Овде смо такође ставили апсолутну вредност због случаја када је угао x негативан, у том случају површина и даље мора бити позитивна, само је посматрани исечак „испод“ основице OA. Пошто је основице OA$=1$, површина је

$$P_{is\ AOB} = \frac{|x|}{2}.$$

На крају, посматрамо троугао ΔOAC. Његова површина је једнака

$$P_{\Delta OAC} = \frac{1}{2} OA * \mathrm{AC}.$$

Основица и овог троугла је OA, полупречник тригонометријског круга, стога је OA$= 1$. Висина овог троугла је AC, на основу особина тригонометријског круга, једнака је $|tg\, x|$ (као и у претходним случајевима, узимамо апсолутну вредност због могућности да је угао x негативан, а висина троугла и даље мора бити позитивна, па у том случају би се теме C налазило „испод“ основице OA). Према томе, површина је

$$P_{\Delta OAC} = \frac{1}{2} * 1 * |tg\, x|$$

$$P_{\Delta OAC} = \frac{|tg\, x|}{2}.$$

Пошто смо на почетку уочили да је

$$P_{\Delta OAB} < P_{is\ \ AOB} < P_{\Delta OAC},$$

то можемо записати и као

$$\frac{|sin\, x|}{2} < \frac{|x|}{2} < \frac{|tg\, x|}{2} \quad /* \frac{2}{|sin\, x|}$$

$$1 < \frac{|x|}{|sin\, x|} < \frac{|tg\, x|}{|sin\, x|}$$

$$1 < \left|\frac{x}{sin\, x}\right| < \frac{\left|\frac{sin\, x}{cos\, x}\right|}{|sin\, x|}$$

$$1 < \left|\frac{x}{sin\, x}\right| < \frac{1}{|cos\, x|}.$$

Будући да тражимо лимес ове функције у околини нуле, с њене леве или десне стране, x и $\sin x$ ће бити истог знака, као и у целом интервалу $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, одакле је $\frac{sin\, x}{x} > 0$, тако да се можемо ослободити апсолутне вредности. Такође, у целом интервалу $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, па је $cos\, x > 0$, тако да се ослобађамо апсолутне вредности и код њега и записујемо

$$1 < \frac{x}{sin\, x} < \frac{1}{cos\, x}$$

или, помоћу реципрочних вредности израза као

$$cos\, x < \frac{sin\, x}{x} < 1.$$

Пошто се $\frac{sin\,x}{x}$ налази између $\cos x$ (које када $x \to 0$, тежи јединици) и саме јединице, закључујемо да и $\frac{sin\,x}{x}$ мора тежити јединици када $x \to 0$. Коришћењем апсолутних вредности обухваћен је и случај приближавања нули преко негативних вредности угла x, чиме је показано да је лимес функције $\frac{\sin x}{x}$ једнак са обе стране и износи 1,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{sin\,x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{sin\,x}{x} = 1\,.$$

2) $\boldsymbol{\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$

Нека је $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Низ $\{e_n\}_{n \in N}$ конвергира и граница му је број e (Видети пример 4.). То значи да и за сваки делимични низ $\{n_k\}_{k \in N}$ низа природних бројева $\{n\}_{n \in N}$, за који је $\lim_{k \to +\infty} n_k = +\infty$, важи једнакост

$$\lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$$

Нека је сада $\{x_k\}_{k \in N}$ било који низ позитивних бројева x_k $(k \in N)$, такав да је

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = +\infty.$$

Ако ставимо $[x_k] = n_k$ ($[x_k]$ – појединачни, k-ти елемент низа), тада је $n_k \le x_k \le n_k + 1$, одакле следи

$$\frac{1}{n_k + 1} \le \frac{1}{x_k} \le \frac{1}{n_k} \quad /+1$$

$$1 + \frac{1}{n_k + 1} \le 1 + \frac{1}{x_k} \le 1 + \frac{1}{n_k},$$

а овај облик можемо записати

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}.$$

Како је

$$\lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} = \frac{\lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1}}{\lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

и

$$\lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1} = \lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} * \lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right) = e,$$

закључујемо да важи и једнакост

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e.$$

Пошто је $\{x_k\}_{k\in N}$ произвољан низ из овога следи непосредно тврђење теореме

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

3) $\boldsymbol{\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$

За доказивање овог лимеса довољно је увођење смене $t=\frac{1}{x}$ која тежи ∞, када x тежи 0.

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$$

4) $\boldsymbol{\lim_{x\to0}\frac{ln(1+x)}{x}=1}$

$$\lim_{x\to0}\frac{ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}*ln(1+x)\right)=\lim_{x\to0}\left(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1$$

5) $\boldsymbol{\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1}$

Уводимо смену $t=e^x-1$, одакле је $x=\ln(1+t)$ када $x\to0$, тада такође $t\to0$.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)^{-1}=\left(\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}\right)^{-1}=1^{-1}=1$$

6) $\boldsymbol{\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a}$

За произвољно $a>0$ важи $a^x=e^{x\ln a}$, одакле имамо

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}.$$

Сада увођењем смене $t=e^{x\ln a}-1$ имамо да $t\to0$ када $x\to0$, и да је $x=\frac{\ln(t+1)}{\ln a}$ из чега следи

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}}=\lim_{t\to0}\frac{\ln a}{\frac{\ln(t+1)}{t}}=\frac{\lim_{t\to0}(\ln a)}{\lim_{t\to0}\left(\frac{\ln(t+1)}{t}\right)}=\frac{\ln a}{1}=\ln a.$$

3.2. Додатна правила

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty, \quad n \in \mathbb{N}$ произвољан

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & n \in \mathbb{N} \text{ паран} \\ -\infty, & n \in \mathbb{N} \text{ непаран} \end{cases}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-n} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^{-n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}$ произвољан

4) $\lim\limits_{x\to0+} x^{-n} = \lim\limits_{x\to0-} x^{-n} = +\infty, \quad n \in \mathbb{N}$ паран

5) $\lim\limits_{x\to0+} x^{-n} = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to0-} x^{-n} = -\infty, \quad n \in \mathbb{N}$ непаран

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases}$

7) $\lim\limits_{x\to0+} x^{\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ +\infty, & \alpha < 0 \end{cases}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^{x} = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 1 \\ 0, & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^{x} = \begin{cases} 0, & \alpha > 1 \\ +\infty, & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} log_{\alpha} x = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 1 \\ -\infty, & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$

11) $\lim\limits_{x\to0+} log_{\alpha} x = \begin{cases} -\infty, & \alpha > 1 \\ +\infty, & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$

У наведеним правилима имамо $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.3. Израчунавање граничне вредности функције помоћу таблице основних граничних вредности-примери

Следећи задаци решавају се помоћу таблице основних граничних вредности. Уколико функција чија се гранична вредност тражи није облика као из таблице, вршимо трансформацију израза након чега примењујемо позната правила.

1) а) $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{tg\, x}{x}}$

- $\lim_{x\to 0}\frac{tg\, x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x * \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} * \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} * \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$

$= 1 * \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1 * \frac{1}{\cos 0} = 1 * \frac{1}{1} = 1$

б) $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{tg\, x - \sin x}{x^3}}$

- $\lim_{x\to 0}\frac{tg\, x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x * \cos x}{\cos x}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x - \sin x * \cos x}{\cos x}}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin x * \cos x}{x^3 \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} * \frac{1-\cos x}{x^2} * \frac{1}{\cos x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} * \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} * \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1 * \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} * \frac{1}{\cos 0}$

$= 1 * \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} * \frac{1}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2 * \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2$

$= 2 * \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x * \frac{2}{2}}\right)^2 = 2 * \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2 * \frac{x}{2}}\right)^2 = 2 * \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)^2 * \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$

$= 2 * \lim_{x\to 0}\frac{1}{4} * \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 2 * \frac{1}{4} * \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} * 1^2 = \frac{1}{2}$

2) а) $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x} - 1}{x}}$

- $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{x * \left(\frac{-2}{-2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{\frac{-2x}{-2}} = \lim_{x\to 0}(-2) * \frac{e^{-2x}-1}{-2x} = -2 * \ln e$

$= -2 * 1 = -2$

б) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}}$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x*\frac{x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}*\dfrac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}*\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$

$$=\ln e*\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-1}=1*(1)^{-1}=1$$

3) а) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+12x)}{3x}}$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+12x)}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+12x)}{3x*\frac{4}{4}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+12x)}{\frac{12x}{4}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+12x)}{12x}*4$
  $=1*4=4$

б) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x^2)}{\sin^2 3x}}$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x^2)}{\sin^2 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x^2)*\frac{4x^2}{4x^2}}{\sin^2 3x*\left(\frac{3x}{3x}\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2*\frac{\ln(1+4x^2)}{4x^2}}{(3x)^2*\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2*1}{(3x)^2*1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{9x^2}=\frac{4}{9}$$

4) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin x)^5-1}{x}}$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin x)^5-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin x)^5-1}{x*\frac{\sin x}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin x)^5-1}{\sin x*\frac{x}{\sin x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)^5-1}{\sin x}*\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)^5-1}{\sin x}*\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=5*1=5$$

5) а) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\,tg^2 x\right)^{ctg^2 x}}$

- $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\,tg^2 x)^{ctg^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+3\,tg^2 x)^{\frac{1}{tg^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+3\,tg^2 x)^{\frac{1}{3\,tg^2 x}*\frac{3}{1}}=e^3$

б) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{4x}\right)^x}$

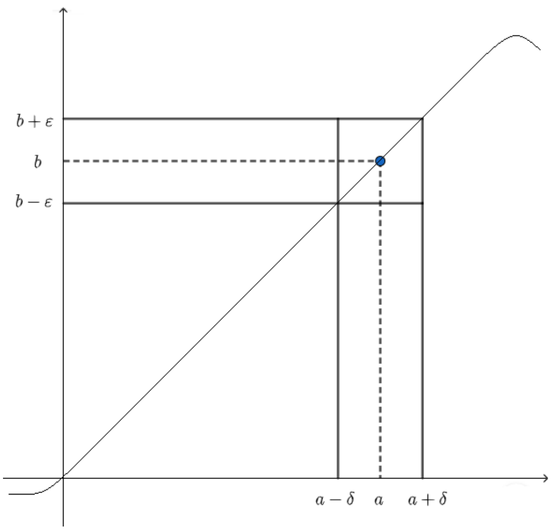
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{4x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\frac{4x}{5}}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\frac{4x}{5}}\right)^{-\frac{4x}{5}*\left(-\frac{5}{4}\right)}=e^{-\frac{5}{4}}$

4. ПРИМЕНА ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ФУНКЦИЈЕ

4.1. Непрекидност функције

Нека је реална функција f дефинисана са f: A → ℝ. Нека тачка $a \in$ A. Тада кажемо да је функција f непрекидна у тачки a ако за сваки позитиван број ε постоји позитиван број δ (δ зависи од a и од ε, па је $\delta = \delta(\varepsilon)$) тако да важи следећа импликација:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathrm{A})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$



Слика 7. Функција $f(x)$ која је непрекидна у тачки a

Непрекидност се може дефинисати и преко граничне вредности. Наиме, функција $f(x)$ је непрекидна у тачки a ако и само ако у тој тачки има граничну вредност и ако је при томе:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Ако је функција дефинисана у некој тачки a и ако има десну граничну вредност $f(a + 0)$ и ако је при томе $f(a) = f(a + 0)$ онда је функција непрекидна сдесна у тој тачки a. Аналогно томе, ако је функција дефинисана у тачки a и има леву граничну вредност $f(a - 0)$ и ако је $f(a) = f(a - 0)$ функција је непрекидна слева у тачки a. Дакле, потребан и довољан услов да је функција непрекидна у тачки a је да је непрекидна и слева и непрекидна сдесна. У супротном, ако функција f у тачки $a \in$ A није непрекидна назива се прекидна, док a представља тачку прекида.

Функција f је непрекидна на отвореном интервалу $(m,n) \subset$ A ако је непрекидна у свакој тачки тог интервала.

Функција f је непрекидна на затвореном интервалу $[m, n] \subset$ A ако је:

- непрекидна у свакој тачки отвореног интервала (m, n)
- $\lim_{x\to m+} f(x) = f(m)$
- $\lim_{x\to n-} f(x) = f(n)$

Особине непрекидних функција:

1) Ако су функције f и g непрекидне у тачки a_0, онда су у тој тачки непрекидне и функције:

$$f \pm g, \quad C * f\ (C \neq 0, C \in \mathbb{R}), \quad f * g, \quad \frac{f}{g}\ (g(a) \neq 0).$$

2) Ако је функција $y = g(t)$ непрекидна у тачки t_0, а функција $y = f(a)$ у тачки $a_0 = g(t_0)$, онда је сложена функција $y = f(g(t))$ непрекидна у тачки t_0.

3) Полином степена n је непрекидан за све $a \in \mathbb{R}$.

4) Рационална функција је непрекидна у свим тачкама у којима је именилац различит од нуле.

5) Ако је функција непрекидна и позитивна (негативна) у тачки a, онда постоји околина $\mathrm{U}(a_0)$ тачке a_0 таква да за:

$$x \in U\ (a_0)\ \cap\ D(f) \text{ важи } f(a) > 0 \text{ (односно } f(a) < 0)$$

Разликујемо три врсте прекида функције:

1) Ако постоји $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ као коначан број, али $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ онда је то привидан или отклоњив прекид.

2) Ако постоје лева и десна гранична вредност функције f у тачки a и оне нису међусобно једнаке, онда за ту функцију се каже да има скок или прекид прве врсте.

   Ако имамо $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = b_1$ и $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = b_2$, тада је скок: $b_2 - b_1$.

3) Ако једна од граничних вредности $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ не постоји, онда је то прекид друге врсте.

За привидан или отклоњив прекид се још каже да је то прекид прве врсте код кога је скок једнак 0, односно:

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = b \quad \Longrightarrow \quad \text{скок: } b_2 - b_1 = 0$$

Пример 6.

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

1) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-}(x+1) = 1+1 = 2$
- $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+}(x+1) = 1+1 = 2$

Пошто су леви и десни лимес (гранична вредност) једнаки, ради се о привидном или отклоњивом прекиду.

2)

- $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f(-1) = -1$
- $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} f(1) = 1$

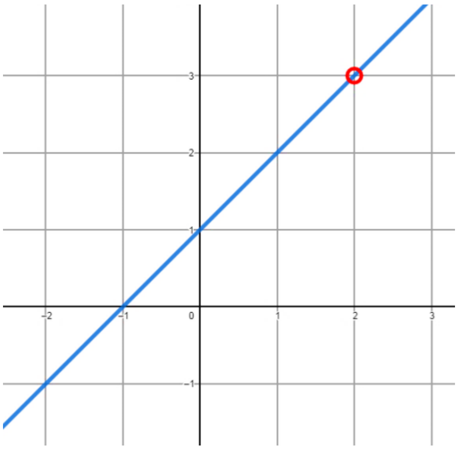
скок: $b_2 - b_1 = 1-(-1) = 2$

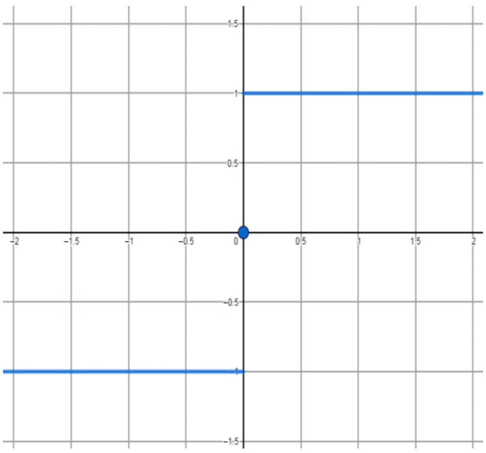
Пошто леви и десни лимес постоје, али су међусобно различити, ради се о прекиду прве врсте чији је скок 2.

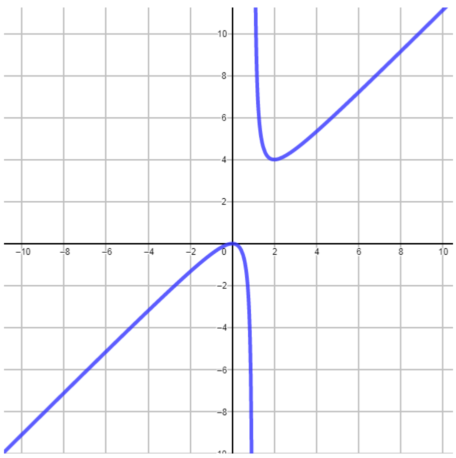
3) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{1}{1-0-1} = \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{1}{-0} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{1}{1+0-1} = \lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{1}{+0} = +\infty$

У овом случају обе граничне вредности нису коначни бројеви (не постоје), стога ради се о прекиду друге врсте.


Слика 8. Привидан прекид


Слика 9. Прекид прве врсте


Слика 10. Прекид друге врсте

4.2. Асимптоте

Права која има једначину $y = kx + n \ \ (k, n \in \mathbb{R})$ је асимптота графика оне функције f која се у бесконачности понаша исто као права, односно ако је:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + n)) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - (kx + n)) = 0.$$

Другим речима, права $y = kx + n$ је асимптота функције f ако се растојање између одговарајућих тачака $(x, f(x))$ и $(x, kx + n)$ њиховог графика неограничено смањује (тежи 0), када аргумент x ових функција неограничено расте (тежи $+\infty$) или опада (тежи $-\infty$). Дакле, асимптота је права којој се функција приближава у бесконачно далекој тачки.

У односу на положај асимптоте према координатним осама разликујемо три типа асимптота:

1) Вертикална

Потенцијална вертикална асимптота се налази у прекидима области дефинисаности. Уколико је тачка x' прекид фукције, потребно је испитати како се та функција понаша у околини те тачке, испитати и леви и десни лимес, осим ако функција није негде дефинисана (за функцију $y = \ln x$ испитујемо само десни лимес тачке 0, пошто је она дефинисана за $x > 0$).

$$\lim_{x\to x'-0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x'+0} f(x)$$

Ако су решења ова два лимеса $+\infty$ или $-\infty$ онда се ради о прави $x = x'$која је вертикална асимптота, али то није случај ако се добије одређен, коначан број коме функција тежи.

2) Хоризонтална

Хоризонтална асимптота $y = a$ настаје када постоји коначна гранична вредност функције у бесконачности:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a \qquad a \in \mathbb{R}$$

Пошто функција $f(x)$ може да тежи a или преко бројева већих од a, да тежи a^+, или преко бројева мањих од a, да тежи a^-, постоје две ситуације за понашање вредности функције. Дакле, када $x \to \pm\infty$ ако $f(x) \longrightarrow a^+$ тада је график функције изнад хоризонталне асимптоте $y = a$, а испод је ако $f(x) \longrightarrow a^-$.

3) Коса

Коса асимптота је права $y = kx + n$ $(k \neq 0)$, у $+\infty$ или $-\infty$ када постоји лимес $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$. Затим се одређује и n, $n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$. Уколико је $k = 0$ функција нема косу асимптоту, већ ће права $y = n$ представљати хоризонталну.

Постоје две могућности за понашање функције $\frac{f(x)}{x}$. Уколико она тежи k^+ график функције $f(x)$ је изнад асимптоте $y = kx + n$, а ако тежи k^- график је испод асимптоте.

Из реченог се јасно види да хоризонтална и коса асимптота не могу постојати заједно са исте стране!

Пример 7.

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \quad x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

а) Вертикална

- $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{2^2 - 5 * 2 + 7}{2 - 2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

↳ Има вертикалну асимптоту са десне стране ($x = 2$)

- $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{2^2 - 5 * 2 + 7}{2 - 2} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

↳ Има вертикалну асимптоту са леве стране ($x = 2$)

б) Хоризонтална

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} : \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \dfrac{1 - 0 + 0}{0^+} = +\infty$

↳ Нема хоризонталну асимптоту са десне стране

$x \to -\infty$
$t = -x$
$t \to +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^2 + 5t + 7}{-t - 2} : \dfrac{t^2}{t^2} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1 - \frac{5}{t} + \frac{7}{t^2}}{-\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2}}$

$= \dfrac{1 - 0 + 0}{0^-} = -\infty$

↳ Нема хоризонталну асимптоту са леве стране

б) Коса

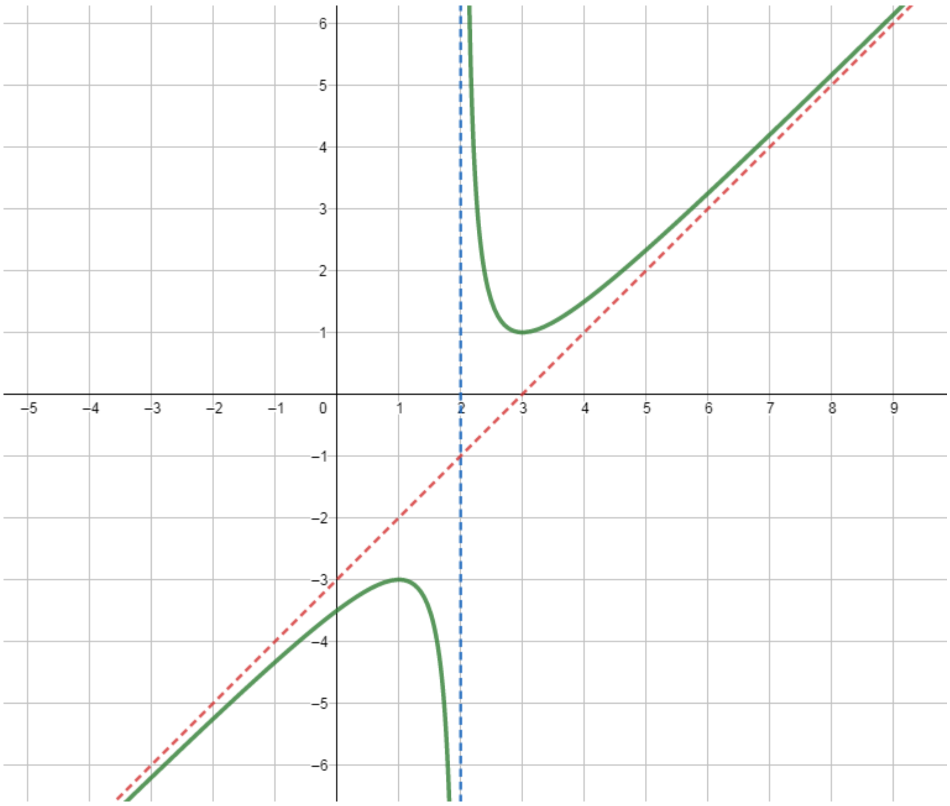
- $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x^2 - 2x} : \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}}$

$= \dfrac{1 - 0 + 0}{1 - 0} = \dfrac{1}{1} = 1$

- $n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} - 1 * x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 7 - x^2 + 2x}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x + 7}{x - 2} : \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3 + \frac{7}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \dfrac{-3 + 0}{1 - 0} = -3$

↳ Има косу асимптоту ($y = kx + n \Rightarrow y = x - 3$)



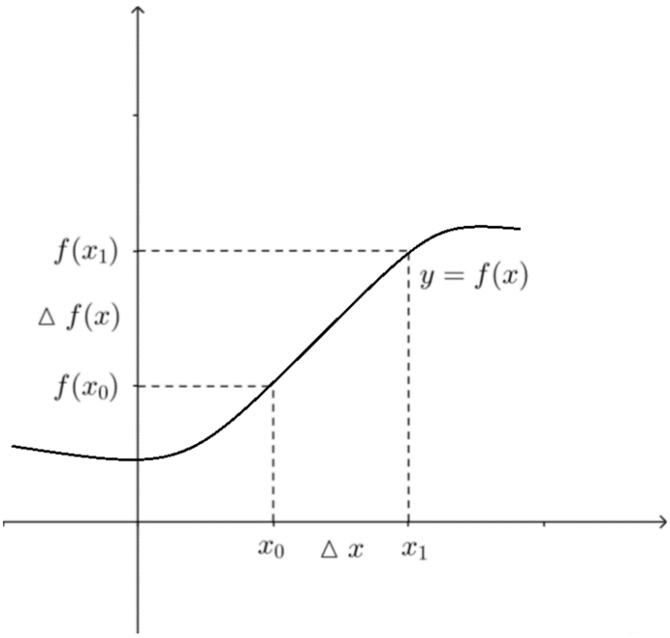
Слика 11. График функције и асимптоте из примера 7.

- Зеленом линијом је приказана функција $f(x) = \frac{x^2-5x+7}{x-2}$
- Плава испрекидана линија представља вертикалну асимптоту $x = 2$
- Црвена испрекидана линија означава косу асимптоту $y = x - 3$

4.3. Изводи

Посматрајући неку функцију $f(x)$ која је дефинисана на интервалу (a, b) у коме је тачка x_0 фиксирана уочавамо тачку x_1 из тог интервала која може да се помера лево или десно, па се назива променљива тачка интервала (a, b). Разлика $x_1 - x_0$ показује промену, односно прираштај вредности независно променљиве x и обележава се са $\Delta x = x_1 - x_0$.

Разлика $f(x_1) - f(x_0)$ представља одговарајућу промену, односно прираштај функције $f(x)$ и обележава се са $\Delta f(x) = f(x_1) - f(x_0)$ или $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$ када је функција означена са $y = f(x)$.



Слика 12. Приказ Δx и Δy посматране функције $f(x)$

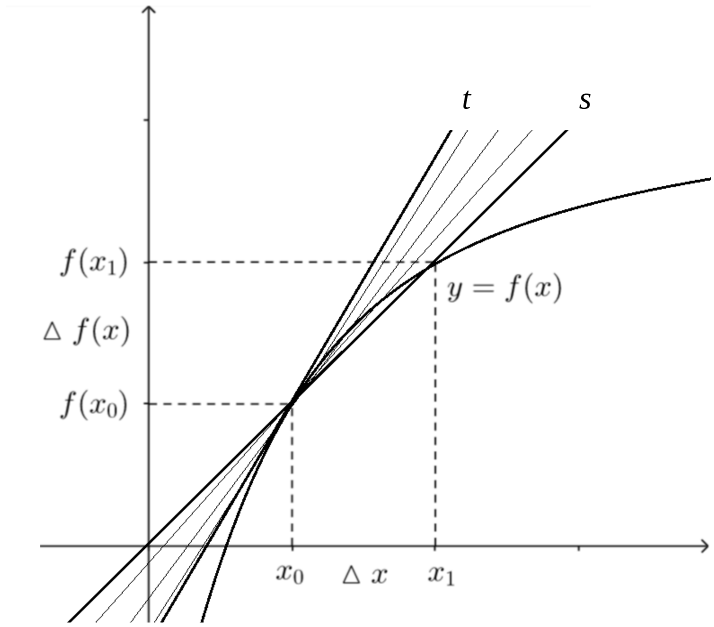
Количник $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ назива се средњом или просечном брзином промене функције у интервалу $[x_0, x_1]$. Разматрамо случај где се тачка x_1 приближава x_0, односно x_1 тежи x_0. Уколико постоји та гранична вредност, њу узимамо за брзину промене функције у тачки x_0 што се у математици и назива извод.

Дефиниција 8. Извод функције једнак је граничној вредности количника прираштаја функције и прираштаја независно променљиве, кад прираштај независно променљиве тежи нули.

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Посматрајући сечицу s која пролази кроз тачке $(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$ у ситуацији када се прираштај независно променљиве смањује, односно када се x_1 помера ка x_0, она све мање сече криву $y = f(x)$, да би у граничном случају постала тангента *t* дате криве (Слика 13). Тада количник прираштаја функције и прираштаја независно променљиве $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ представља коефицијент правца k, односно тангенс угла који тангента заклапа са позитивним смером x осе.

$$tg\ \alpha = k = y' = f'(x)$$



Слика 13. Геометријски приказ извода

Таблица извода	
1) $(C)' = 0 \quad (C = const)$ 2) $(x)' = 1$ 3) $(x^n)' = nx^{n-1}$ 4) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$ 5) $(a^x)' = a^x \ln a$ 6) $(e^x)' = e^x$ 7) $(log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$ 8) $(ln\, x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$	9) $(sin\, x)' = cos\, x$ 10) $(cos\, x)' = -sinx$ 11) $(tg\, x)' = \frac{1}{cos^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ 12) $(ctg\, x)' = -\frac{1}{sin^2 x} \quad (x \neq k\pi)$ 13) $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\lvert x \rvert < 1)$ 14) $(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\lvert x \rvert < 1)$ 15) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ 16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Табела 3. Таблица извода

Правила извода:

f, g, u, v - функције

1) $[Cf(x)]' = Cf'(x)$

2) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$ -извод збира/разлике

3) $(u * v)' = u'v + v'u$ -извод производа

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ -извод количника

5) $[f(g(x))]' = f'[g(x)] * g'(x)$ -извод сложене функције

Изводи вишег реда:

- $y'' = (y')'$ ⟶ други извод је први извод првог извода
- $y''' = (y'')'$ ⟶ трећи извод је први извод другог извода
  $\dots$
- $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$ ⟶ n-ти извод је први извод $(n-1)$-вог извода

Једначина тангенте

- Тангента на криву $y = f(x)$ у тачки (x_0, y_0) у којој је функција диференцијабилна има једначину:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Једначина нормале

- Нормала на криву $y = f(x)$ у тачки (x_0, y_0) је права која је нормална на тангенту криве у тој тачки и њена једначине је:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

5. ЛОПИТАЛОВО ПРАВИЛО

5.1. Појам, теорема и доказ Лопиталовог правила

Лопиталово правило представља назив за теореме које је успоставио француски математичар Гијом де Лопитал помоћу којих се могу одредити граничне вредности неодређених облика „$\frac{0}{0}$“ и „$\frac{\infty}{\infty}$“ помоћу извода, тако што се ови облици трансформишу у одређене (видети табелу 4.), што омогућава израчунавање лимеса. Лопиталово правило, поред ових, може се и применити за решавање неодређених израза као што су:

„$0 \cdot \infty$“, „$\infty - \infty$“, „∞^0“, „1^∞“ и „0^0“,

тако што се они погодним трансформацијама претходно сведу на облик „$\frac{0}{0}$“ или „$\frac{\infty}{\infty}$“.

Одређени изрази	Неодређени изрази
Нека $k \in \mathbb{R}$ 1) $k + \infty = +\infty$ 2) $k - \infty = -\infty$ 3) $+\infty + \infty = +\infty$ 4) $-\infty - \infty = -\infty$ 5) $k \times (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & k > 0 \\ -\infty, & k < 0 \end{cases}$ где је $k \neq 0$ 6) $k \times (-\infty) = \begin{cases} +\infty, & k < 0 \\ -\infty, & k > 0 \end{cases}$ где је $k \neq 0$ 7) $\frac{k}{+\infty} = 0$ и $\frac{k}{-\infty} = 0$ 8) $\frac{k}{0} = \begin{cases} +\infty, & k > 0 \\ -\infty, & k < 0 \end{cases}$ где је $k \neq 0$	1) $\frac{0}{0}$ 2) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 3) $0 \times (\pm\infty)$ 4) $+\infty + (-\infty)$ 5) $(\pm\infty)^0$ 6) $1^{\pm\infty}$ *7)* 0^0

Табела 4. Одређени и неодређени изрази

Теорема:

Ако су $f(x)$ и $g(x)$ функције за које важи:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

или

b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$

онда је:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказ:

Нека су за функције f, g: $[a,b) \to \mathbb{R}$ испуњени следећи услови:

a) f и g су непрекидне на интервалу $[a,b)$;
b) f и g су диференцијабилне функције у интервалу (a,b), при чему је $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a,b)$;
c) $f(a) = 0$ и $g(b) = 0$

Ако постоји $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (коначан или бесконачан), онда постоји и $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$, и важи

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Нека је $x \in$ (a,b) произвољан број. Тада функције f и g испуњавају услове Кошијеве теореме (видети прилог 1) на сегменту $[a, x]$, па постоји тачка ξ из које добијамо једнозначну функцију $\xi = \xi(x) \in (a, x)$, тако да

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'\big(\xi(x)\big)}{g'\big(\xi(x)\big)}. \quad (1)$$

Пошто је $f(a) = g(b) = 0$, следи

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'\big(\xi(x)\big)}{g'\big(\xi(x)\big)}. \quad (2)$$

Нека постоји гранична вредност

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L. \quad (3)$$

Из $a < \xi(x) < x$, односно из $\xi = \xi(x) \in (a, x)$, следи

$$\lim_{x \to a+0} \xi(x) = a. \quad (4)$$

Како је $\xi(x) > a$, за свако $x \in (a,b)$, на основу теореме о смени променљиве приликом израчунавања лимеса (видети прилог 2), следи да постоји

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'\big(\xi(x)\big)}{g'\big(\xi(x)\big)}, \quad (5)$$

и да је

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'\big(\xi(x)\big)}{g'\big(\xi(x)\big)} = L. \quad (6)$$

Потом, из (2) и (6) следи да постоји и

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

и да је:

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Стога, изводи се закључак

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

5.2. Израчунавање граничне вредности функције употребом Лопиталовог правила-примери

1) $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}}$

- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x} \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2\cos 2x} = \frac{e^0}{2\cos 0} = \frac{1}{2}$

2) $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}}$

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\sin 3x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{2} = \frac{3\cos 0}{2} = \frac{3}{2}$

3) $\boldsymbol{\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}}$

- $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1} \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(x^n-1)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{n\cdot x^{n-1}}{1} = n\cdot 1^{n-1} = n$

4) $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} x^2 \ln x}$

- $\lim_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-2}} \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}$

  $= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-2} = -\frac{0^2}{2} = 0$

5) $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} x \ln^2 x}$

- $\lim_{x\to 0} x\ln^2 x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 x}{x^{-1}} \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\ln^2 x)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0} -\frac{2x^2 \ln x}{x}$

  $= \lim_{x\to 0} -2x\ln x = -2\lim_{x\to 0} x\ln x = -2\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-1}} \overset{\text{def}}{=} -2\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'}$

  $= -2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = -2\lim_{x\to 0} -x = 2\lim_{x\to 0} x = 2\times 0 = 0$

6) $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} x^2 e^{-x}}$

- $\lim_{x\to +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^x} \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{e^x} \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{(2x)}{(e^x)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2}{e^x}$

  $= \frac{2}{e^{+\infty}} = \frac{2}{+\infty} = 0$

6. ЗАЉУЧАК

Гранична вредност се записује као

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

или

$$f(x) \to b \text{ кад } x \to a,$$

и чита се: „гранична вредност (или лимес) функције $f(x)$ када x тежи a је b“.

Значај граничне вредности огледа се у томе што је помоћу ње могуће анализирати понашање вредност функције у околини неке тачке чак и када функција у самој тачки није дефинисана. Но, функција f у тачки a има граничну вредност ако и само ако у тој тачки има и десну и леву граничну вредност и ако су оне једнаке.

Што се тиче задатака који укључују граничну вредност, за њихово решавање потребно је да у изразу заменимо вредности непознате x познатом вредношћу a којој она тежи и уколико је тај израз одређен, задатак је завршен. Ако је израз пак неодређен користимо се већ показаним начинима за решавање лимеса облика $\lim\limits_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ и $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, таблицом основних граничних вредности или Лопиталовим правилом.

Као што смо рекли у уводу, идеја граничне вредности је доста стара. Архимеду је помогла да одреди запремину лопте, док је Зенона збунила. Наиме, Зенон како би доказао Парменидово учење, формулисао је четири парадокса, а наводно их је постојало четрдесет, којима се показује да иако у нашем искуству стварности постоје и кретања и промене, ми нисмо заиста у стању да их логички појмимо, јер је наш разум оспособљен само за оно што је непротивречно (Називи тих парадокса су „Ахил и корњача“, „Дихотомија“, „Стрела“ и „Стадион“).

Коришћењем граничне вредности створене су области диференцијалног и интегралног рачуна које су помогле да се реше различити проблеми везани за дужину, површину и запремину равних фигура и тела која су ограничена кривим линијама. И не само то, разне области физике, хемије, астрономије, инжењерских наука, унапређене су коришћењем ове, на први поглед, једноставне идеје.

Ова област математике нам омогућава да на основу почетних услова и закона кретања проучавамо прошлост и предвидимо будућност универзума.

ПРИЛОГ

Прилог 1

Кошијева теорема без доказа:

Нека су функције f и g непрекидне на затвореном интервалу $[a, b]$, диференцијабилне на отвореном интервалу (a, b) и нека је $g'(x) \neq 0$ за $x \in (a, b)$. Тада постоји бар једна тачка $x_0 \in (a, b)$, таква да је

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Кошијева теорема је теорема средње вредности и представља уопштење Лагранжове теореме, јер за $g(x) = x$ се добија управо њено тврђење. Назив је добила по француском математичару Огистену Лују Кошију.

Прилог 2

Теорема о смени промењиве приликом израчунавања лимеса:

Нека је функција f дефинисана у некој десној околини тачке $a \in \mathbb{R}$, док је функција g дефинисана у некој десној околини тачке $b \in \mathbb{R}$, и нека су испуњени следећи услови:

а) $\lim\limits_{y \to b+0} g(y) = c \in \overline{\mathbb{R}}$

$b)$ $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$

$c)$ Постоји $\delta > 0$ такво да за свако $x \in (a, a+\delta)$ важи $f(x) > b$

Тада постоји десна гранична вредност сложене функције $g \circ f$ у тачки a и важи:

$$\lim_{x \to a+0} g\big(f(x)\big) = \lim_{y \to b+0} g(y) = c.$$

Слично се могу формулисати остале теореме овог типа које се тичу смене промењиве где се претпоставља постојање леве или десне једностране граничне вредности функције f у тачки a, и леве или десне једностране граничне вредности функције g у тачки b, али са одговарајућим трећим условом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Богославов, Вене Т., Збирка решених задатака из математике 4, Завод за уџбенике, Београд, 2016.
[2] Дошлић, Томислав, Сандрић, Никола, Математика 1, Грађевински факултет, Загреб, 2008.
[3] Кекић Матић, Снежана, Математика 1, Пољопривредни факултет, Нови Сад, 2016.
[4] Мардешић, Сибе, Делинић, Крешимир, Математичка анализа: у н-димензионалном реалном простору. Бројеви, конвергенција, непрекидност. Део 1., Школска књига, Загреб, 1979.
[5] Миличић, Милош, Математичка анализа, Академска мисао, Београд, 2012.
[6] Савић, Миле, Цветковић, Владимир Н., Цекић, Ненад, Филозофија за IV разред гимназије и стручних школа, Завод за уџбенике, Београд, 2008.
[7] Седлар, Јелена, Математичка анализа 2016/17, Факултет грађевинарства, архитектуре и геодезије, Сплит, 2017.
[8] Томић, Зорана, Граничне вредности функција, Мастер рад, ПМФ, Нови Сад, 2012.
[9] Школска енциклопедија - математика, физика, астрономија, рачунарство, Просвета, Београд, 1992.
[10] Математичка анализа 1 и 2 - Предавања и збирка задатака, ПМФ, Ниш,2019. http://nasport.pmf.ni.ac.rs/ (http://nasport.pmf.ni.ac.rs/materijali/173/KnjigaOdvojeno.pdf) 1.2.2020.
[11] https://matematiranje.in.rs/ (https://matematiranje.in.rs/index.php/iv-godina), 10.2.2020.
[12] http://www.rajak.rs/sr/ (http://www.rajak.rs/sr/video-lekcije/cetvrti-razred-srednje-skole/), 4.2.2020.
[13] http://www.matf.bg.ac.rs/ (http://www.matf.bg.ac.rs/p/files/43-Granicne_vrednosti_nizova.pdf), 8.3.2020.

Датум предаје: _______________

Комисија:

Председник _________________

Испитивач _________________

Члан _________________

Коментар:

Датум одбране:_______________ Оцена___________ (___)